数理解析研究所講究録
第 1763 巻 2011 年 66-74

On the WKB theoretic transformation and its application

東京大学大学院数理科学研究科　神本 晋吾 (Shingo Kamimoto)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 Introduction

次の 1 次元定常型 Schrödinger 方程式を考える;

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\eta^2 Q(x,\eta)\right)\psi(x,\eta)=0 \qquad (\eta\text{: a large parameter}). \tag{1.1}$$

ただし,$Q(x,\eta)$ は

$$Q(x,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)\eta^{-n} \tag{1.2}$$

の形をしており, 各係数 $Q_n(x)$ は考えている領域で正則 (あるいは高々極を持つ程度) とする. このとき,(1.1) の WKB 解

$$\begin{aligned}\psi_\pm(x,\eta)&=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}}}\exp\left(\pm\int_{x_0}^{x}S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)dx\right)\\&=\exp\left(\pm\eta\int_{x_0}^{x}S_{-1}(x)dx\right)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{\pm,n}(x)\eta^{-n-1/2}\end{aligned} \tag{1.3}$$

を考える. ただし,$S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)$ は (1.1) の Riccati 方程式の解

$$S(x,\eta)=\sum_{n=-1}^{\infty}S_n\eta^{-n} \tag{1.4}$$

の odd part とする. このとき,$\psi_\pm(x,\eta)$ の Borel 変換像 $\psi_{\pm,B}(x,y)$ は

$$\psi_{\pm,B}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_{\pm,n}(x)}{\Gamma(n+1/2)}\left(y\pm y_0(x)\right)^{-n-1/2} \tag{1.5}$$

で定義される. ただし,

$$y_0(x)=\int_{x_0}^{x}S_{-1}(x)dx \tag{1.6}$$

とする.

WKB 解 $\psi_\pm$(の Borel 和) の性質を調べる際,Stokes 現象の明確な記述, 特に変わり点 ($Q_0(x)$ の零点) や極の近傍での解析は重要となる.Stokes 現象は WKB 解の Borel 変換像 $\psi_{\pm,B}$ の特異性と密接に関係している ([V, KT]). [AKT1] では WKB 解析的な変換を用いて, 単純変わり点の近傍において $\psi_{\pm,B}$ の「動く特異点」での特異性の明確な記述が行われた. また,[Ko1, Ko2] では同様の手法を用いて,$Q_0(x)$ の単純極の近傍での $\psi_{\pm,B}$ の動く特異点での特異性の明確な記述がなされ, 単純極も変わり点と同様の振る舞いをすることが明らかにされた. 更に [KKo] では単純変わり点, あるいは単純極から出る Stokes 曲線が不確定特異点に流れ込むという幾何学的な状況の下, Stokes 曲線上で, 動く特異点を含む帯状の領域での $\psi_{\pm,B}$ の特異性の完全な記述がなされ, 現状では単純変わり点, あるいは単純極の近傍での解析に関しては満足のいく結果が得られていると言えるだろう.

では, 更に大域的な解析を視野に入れた場合, どのような問題が生じるであろうか?例えば,Weber 方程式のように単純変わり点を二つ持つような方程式の場合, 「動かない特異点」(基準の特異点 ($\psi_{\pm,B}$ の $y = \mp y_0$) を中心として見た位置が x に依存しない特異点) と呼ばれる, 周期的に現れる特異点を持つことが知られている. 一般の方程式に対しても, これらの特異点での $\psi_{\pm,B}$ の振る舞いを解析するため [AKT2] では MTP(Merging-Turning-Points) 方程式が導入され, 二つの単純変わり点により引き起こされる動かない特異点での $\psi_{\pm,B}$ の振る舞いが明らかにされた. ここでは動かない特異点の間隔が二つの単純変わり点の周りを回る周回積分 $\oint \sqrt{Q_0(t)}dt$ に一致することを利用し, 変わり点の合流操作により, この積分量をコントロールすることにより, 動かない特異点での解析を局所的な解析に帰着させた. そして, 合流する二つの変わり点の近傍での Weber 方程式への局所的な変換を通して, 動かない特異点での $\psi_{\pm,B}$ の特異性の明確な記述が行われた.

前述したように, 単純極も変わり点と同様の振る舞いをすることが知られている. すると, 単純極と単純変わり点により引き起こされる動かない特異点での解析は？という自然な問いが生じる. [KKKoT1] では [AKT2] と同様の理由から, MPPT(Merging Pair of a simple Pole and a simple Turning point) 方程式を導入し, 合流する単純極と単純変わり点の近傍での Whittaker 方程式への局所的な変換を通して, 動かない特異点での $\psi_{\pm,B}$ の解析を行った.

また, 最近では [KKT] において二つの合流する単純極の近傍での解析に関する考察も行われている.

本稿では,MPPT 方程式から Whittaker 方程式への変換を通して WKB 解析的な変換論に関する概説を行い, その応用として [KKKoT1] で得られた結果の紹介を行う.

2 WKB 解析的変換論に関して

一般のポテンシャル Q に対し (1.1) の WKB 解の解析を行うため, 解析を行う領域上でポテンシャルの性質を反映した, より扱いやすい方程式に変換することを考える. 例えば, 単純変わり点の近傍では Airy 方程式, 二つの単純変わり点の近傍では Weber 方程式,$\cdots$ 等である. 以下では, 具体的に MPPT 方程式から Whittaker 方程式への変換を通して変換論に関する説明を行う.

MPPT 方程式は次で定義される;

定義 2.1 ([KKKoT1]). 正則パラメータ a を持つ *Schrödinger* 方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-\eta^2\left(\frac{Q_0(t,a)}{t}+\eta^{-1}\frac{Q_1(t,a)}{t}+\eta^{-2}\frac{Q_2(t,a)}{t^2}\right)\right)\tilde{\psi}(t,a,\eta)=0 \tag{2.1}$$

のポテンシャル $Q_{MPPT}(t,a,\eta)$ が次を満たすとき,(2.1) を *MPPT* 方程式と呼ぶ; $Q_j(t,a)$ $(j=0,1,2)$ が $t=a=0$ の近傍で正則で,

$$Q_0(0,a)\neq 0 \quad \mathit{if} \quad a\neq 0, \tag{2.2}$$

$$Q_0(t,0)=ct+O(t^2) \quad \mathit{with} \quad c\neq 0. \tag{2.3}$$

MPPT 方程式の定義から, $Q_{MPPT}(t,a,\eta)$ の η に関する最高次の係数は, $a=0$ で $t=0$ に合流する単純極と単純変わり点を持っていることがわかる. 正則パラメータ a により, この合流をコントロールしている.

注意 2.1. MPPT 方程式は $a=0$ で ghost 方程式と呼ばれる方程式を与える. この方程式のポテンシャルの最高次の係数は極や零点を持たないが, 低次の係数の極の影響により原点が変わり点のような振る舞いをすることが知られている ([Ko3]).

MPPT 方程式を $t=0$ の近傍で次の Whittaker 方程式に変換することを考える;

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\eta^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{x}+\eta^{-2}\frac{\gamma(\gamma+1)}{x^2}\right)\right)\psi(x,\alpha,\gamma,\eta)=0. \tag{2.4}$$

ただし,$\alpha(a),\gamma(a)$ は $a=0$ の近傍で正則で, 次を満たすとする;

$$\alpha(0)=0,\quad \gamma(a)^2+\gamma(a)=Q_2(0,a). \tag{2.5}$$

(2.4) のポテンシャルの η に関する最高次の係数は, $x=0$ に単純極,$x=-4\alpha$ に単純変わり点を持っており, これらは $a=0$ で $x=0$ に合流する.

具体的に変換として, 変換級数

$$x(t,a,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n}x_n(t,a), \tag{2.6}$$

$$\alpha(a,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{-n}\alpha_n(a) \tag{2.7}$$

を次を満たすように構成する;

$$\frac{Q_0(t,a)}{t}+\eta^{-1}\frac{Q_1(t,a)}{t}+\eta^{-2}\frac{Q_2(t,a)}{t^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{x}+\eta^{-2}\frac{Q_2(0,a)}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\eta^{-2}\{x;t\}, \tag{2.8}$$

$$-\frac{1}{2}\{x;t\}:=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{1/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1/2}. \tag{2.9}$$

変換級数 x, α の具体的な構成は [KKKoT1] を参照. ここではまず x, α の満たす基本的な性質を述べる. まず,x, α の η^{-n} の各係数 $x_n(t,a), \alpha_n(a)$ は $t=a=0$ の近傍 U が存在し,U 上正則で次の評価を満たす; ある $C_0, A>0$ が存在し, 任意の $n \geq 0$ に対し

(2.10)
$$\sup_{(t,a)\in U} \{|x_n(t,a)|, |\alpha_n(a)|\} \leq C_0 n! A^n.$$

また $x_0(\cdot, a)$ は $t=0$ の近傍と $x_0=0$ の近傍の正則同型を与え, MPPT 方程式の変わり点を $t_0(a)$ としたとき,

(2.11)
$$x_0(t_0(a),a) = -4\alpha_0(a), \quad x_0(0,a)=0$$

を満たす. また,$\alpha_0(a)$ は $\alpha_0(0)=0$ を満たす. つまり,$x_0(t,a)$ は MPPT 方程式の変わり点と極を, それぞれ (2.4) のパラメータ α を $\alpha_0(a)$ とした方程式の変わり点と極に対応させている.

変換級数 x と α を用いて,(2.4) の WKB 解 $\psi(x,\alpha,\eta)$ の次の変換を考える;

(2.12)
$$\tilde{\psi}(t,a,\eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1/2} \psi(x(t,a,\eta), \alpha(a,\eta), \gamma(a), \eta).$$

このとき,$\tilde{\psi}$ は MPPT 方程式の WKB 解を与える. ここで,(2.12) の右辺の正確な意味は

(2.13)
$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k\geq 1} x_k(t,a)\eta^{-k}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{l\geq 1} \alpha_l(a)\eta^{-l}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial \alpha^m} \psi(x,\alpha,\gamma(a),\eta)\Bigg|_{\substack{x=x_0(t,a),\\ \alpha=\alpha_0(a)}}.$$

x, α の満たす評価 (2.10) と (2.13) の表示から, x, α はそれぞれ Borel 変換を通して $\psi_B(x,\alpha,y)$ に microdifferential operator $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ として作用する. $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ は具体的に次で与えられる [AY];

(2.14)
$$\mathcal{X} =: \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\partial r}{\partial x_0}\right)^{-1/2} \exp(r(x_0,a,\eta)\xi) :$$

(2.15)
$$\mathcal{A} =: \exp\left(\left(\alpha_1\eta^{-1} + \alpha_2\eta^{-2} + \cdots\right)\theta\right) :$$

ここでは $:\cdot:$ により ξ, η, θ を $: \xi := \partial_{x_0}, : \eta := \partial_y, : \theta := \partial_{\alpha_0}$ のように対応させ,$x_0(t,a)$ を t の代わりに新しい座標変数としている. また $g(x_0,a)$ は $x_0(t,a)$ の t 変数に関する逆関数で $r(x_0,a,\eta)$ は

(2.16)
$$r(x_0,a,\eta) = \sum_{k\geq 1} x_k(g(x_0,a),a)\eta^{-k}$$

である.

方程式の変換という立場からすると, 次の microdifferential operator の関係式が得られる. ただし, 以下では簡単のため $\partial_a \alpha_0(0) \neq 0$ を仮定し, a の代わりに α_0 を変数に取り直して考える;

定理 2.2.

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \left(\frac{\partial^2 g/\partial x_0^2}{\partial g/\partial x_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}\right)^2 Q_{MPPT}\left(g(x_0,a), a, \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2.17}$$

$$\mathcal{M} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha_0}{x_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{x_0^2} \tag{2.18}$$

とする $(a = a(\alpha_0))$. このとき $x_0 = \alpha_0 = 0$ の近傍から $x_0\eta = 0$ を除いた集合上, 次の関係式が成立する;

$$\mathcal{L}\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{Y}\mathcal{A}\mathcal{M}|_{\gamma=\gamma(a)}\,. \tag{2.19}$$

ここで $\mathcal{Y}$ は

$$\mathcal{Y} =: \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\partial r}{\partial x_0}\right)^{3/2}\exp(r(x_0,a,\eta)\xi)\;: \tag{2.20}$$

で,$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}$ は可逆な *microdifferential operator* である.

$\mathcal{X}, \mathcal{A}$ の ψ_B への作用は, より具体的に次の微分-積分作用素の作用として表すことができる;

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\mathcal{A}\psi_B =& \frac{\partial g}{\partial x_0}\psi_B(x_0,\alpha_0,\gamma,y) \\ &+ \int_{\mathring{y}}^{y} K(x_0,\alpha_0,y-y',\partial_{x_0},\partial_{\alpha_0})\psi_B(x_0,\alpha_0,\gamma,y')dy'.\end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで,$\mathring{y}$ は積分作用素 ∂_y^{-1} の作用を定める際の積分端点とし, 積分核 $K(x_0,\alpha_0,y,\partial_{x_0},\partial_{\alpha_0})$ は $x_0 = \alpha_0 = y = 0$ の近傍 V 上の無限階微分作用である. つまり,K の表象 $K(x_0,\alpha_0,y,\xi,\theta)$ は $V \times \mathbb{C}_\xi \times \mathbb{C}_\theta$ 上正則で次の評価を満たす ([AKY]); V の任意のコンパクト集合 V_0 と任意の $h > 0$ に対し, ある $C_{V_0,h} > 0$ が存在し

$$\sup_{(x_0,\alpha_0,y)\in V_0} |K(x_0,\alpha_0,y,\xi,\theta)| \le C_{V_0,h}\exp\{h(|\xi| + |\theta|)\}\,. \tag{2.22}$$

注意 2.2. 積分核 K の正則域 V と (2.10) の評価とは密接な関係がある. より正確に言えば,(2.10) から V として $U \times \{|y| < 1/A\} \subset V$ と取れることが保証される.

結論として,$\mathcal{X}\mathcal{A}$ の作用は局所作用素と正則な積分核との合成積により表されるため,$\mathcal{X}\mathcal{A}$ の作用により ψ_B の解析性は保たれる. これらの変換を通して MPPT 方程式の WKB 解の解析を Whittaker 方程式の WKB 解の解析に帰着させる. 変換を用いた MPPT 方程式の具体的な解析については次の節で述べる.

3 変換を用いたMPPT方程式の解析

本節では $a \neq 0$ として議論する.

MPPT 方程式 (2.1) の変わり点 $t_0(a)$ で正規化された WKB 解を $\tilde{\psi}_\pm$ とする．つまり,(1.3) の積分端点 x_0 を $t_0(a)$ と取ったものとする．同様に Whittaker 方程式 (2.4) の変わり点 -4α で正規化された WKB 解を $\psi_\pm$ とする．このとき,(2.12) で与えられた WKB 解の変換は，より詳しく次の WKB 解の対応を与える;

定理 3.1. (2.6),(2.7) で与えられた変換級数 $x(t,a,\eta), \alpha(a,\eta)$ は次の *WKB* 解の対応を与える;

$$\tilde{\psi}_\pm(t,a,\eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1/2} \psi_\pm(x(t,a,\eta), \alpha(a,\eta), \gamma(a), \eta). \tag{3.1}$$

さて,MPPT 方程式の WKB 解の解析を行うためには，まず Whittaker 方程式の WKB 解に対する結果が必要となるわけだが，Whittaker 方程式の WKB 解に関しては，小池，竹井による次の結果が知られている;

定理 3.2 ([KT]). $\psi_{\pm,B}(x,\alpha,\gamma,y)$ は

$$y = -y_\pm(x,\alpha) + 2m\pi i\alpha \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.2}$$

に特異点を持ち，そこでの *alien derivative* $\Delta_{y=-y_\pm+2m\pi i\alpha}\psi_\pm$ は次を満たす;

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad &\left(\Delta_{y=-y_\pm+2m\pi i\alpha}\psi_\pm\right)_B(x,\alpha,\gamma,y)\\ &= \frac{\exp(2m\pi i\gamma)+\exp(-2m\pi i\gamma)}{2m}(\exp(-2m\pi i\eta\alpha)\psi_\pm)_B(x,\alpha,\gamma,y).\end{aligned}$$

ただし，

$$y_\pm(x,\alpha) = \pm\int_{-4\alpha}^{x}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{x}}dx \tag{3.4}$$

とする．

alien calculus に関しては [Sa] を参照．

注意 3.1. S_{odd} を Whittaker 方程式の Riccati 解の odd part とするとき，次の関係式が成立する;

$$2\pi i\eta\alpha = \int_\Gamma S_{\mathrm{odd}}dx. \tag{3.5}$$

ただし,Γ は変わり点と極の周りを半時計回りに回る積分路とする．

この結果から MPPT 方程式の WKB 解の alien derivative を導くため，(3.1) に Borel 変換を適用することにより得られる次の関係式を用いる;

定理 3.3. K を (2.21) で与えられた $\mathcal{XA}$ の積分核とする．このとき次の $\tilde{\psi}_{\pm,B}$ の表示式が成立する;

$$\begin{aligned}(3.6)\qquad \tilde{\psi}_{\pm,B}(t,a,y) =& \frac{\partial t}{\partial x_0}\psi_{\pm,B}(x_0,\alpha_0,\gamma,y)\\ &+ \int_{-y_\pm}^{y} K(x_0,\alpha_0,y-y',\partial_{x_0},\partial_{\alpha_0})\psi_{\pm,B}(x_0,\alpha_0,\gamma,y')dy'\Bigg|_{\substack{x_0=x_0(t,a),\\ \alpha_0=\alpha_0(a),\\ \gamma=\gamma(a)}}.\end{aligned}$$

(3.6) を用いて alien derivative を計算するにあたり以下に注意する; まず注意 2.2 から, ある $r>0$ が存在し少なくとも次の集合 $\widetilde{V}$ 上 (3.6) の表示が成立する;

$$\widetilde{V}=\{|t|<r, 0<|a|<r, |y+y_{\pm}|<r\}. \tag{3.7}$$

よって,2 節で述べたように $\mathcal{XA}$ の作用により $\psi_{\pm,B}$ の解析性は保たれるため,$\tilde{\psi}_{\pm,B}$ は $\widetilde{V}$ 上

$$\{y=-y_{\pm}(x_0,\alpha_0)+2m\pi i\alpha_0\ ; m\in\mathbb{Z}, |2m\pi i\alpha_0|<r\} \tag{3.8}$$

に特異点を持つことがわかる.

ここで,$y=-y_{\pm}+2m_0\pi i\alpha_0$ $(m_0\in\mathbb{Z})$ での $\tilde{\psi}_{\pm}$ の alien derivative を計算することを考える. $a\to 0$ のとき $\alpha_0(a)\to 0$ であったので, a が十分小さいとき $|2m_0\pi i\alpha_0(a)|<r$ となり, (3.6) の変換が適応可能となり, 変換を通しての alien derivative の計算が可能となる.

以上から, 次の主定理を得る;

定理 3.4. 任意の $m\in\mathbb{Z}$ に対し, ある $\delta>0$ が存在し $|t|<r, 0<|a|<\delta$ に対し次が成立する;

$$\begin{aligned}&\left(\Delta_{y=-y_{\pm}+2m\pi i\alpha_0(a)}\tilde{\psi}_{\pm}\right)_B(t,a,y)\\ &=\frac{\exp(2m\pi i\gamma(a))+\exp(-2m\pi i\gamma(a))}{2m}\left(\exp\left(-2m\pi i\eta\alpha(a,\eta)\right)\psi_{\pm}\right)_B(t,a,y).\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意 3.2. (3.9) に現れる $y_{\pm}(x_0,\alpha_0), \alpha(a,\eta)$ は MPPT 方程式のポテンシャル,Riccati 解の odd part $\tilde{S}_{\mathrm{odd}}$ により, 次のように表される;

$$y_{\pm}(x_0(t,a),\alpha_0(a))=\int_{t_0(a)}^{t}\sqrt{\frac{Q_0(t,a)}{t}}dt, \tag{3.10}$$

$$2\pi i\eta\alpha(a,\eta)=\int_{\tilde{\Gamma}}\tilde{S}_{\mathrm{odd}}(t,a)dt. \tag{3.11}$$

ただし,$\tilde{\Gamma}$ は変わり点と極の周りを半時計回りに回る積分路とする.

4 今後の課題

MTP,MPPT 方程式の解析では合流操作を行うことにより, 議論を局所的なものにしていたため, 変換級数の構成には変わり点と極の位置以外の Stokes 幾何の情報を必要としなかった. しかし, 合流操作を行うことなしに全ての動かない特異点での解析を行うためには (3.7) の積分核 K を, 動かない特異点を含むような帯状の領域で構成しなくてはならず, そのためには Stokes 幾何の情報をどのようにして変換級数に取り込むかが問題となる.

また,MPPT 方程式から Whittaker 方程式への変換は $a=0$ まで, つまり ghost 方程式への変換まで正則に構成されている. しかしながら,WKB 解の正規化の問題から $a=0$ での変換が有効に活用されていないのが現状である. MPPT 方程式を用いた ghost 方程式の解析を行えないだろうか？同様に MTP 方程式を用いた 2 位の変わり点の解析を行えないだろうか？

参考文献

[AKY] T. Aoki, K. Kataoka and S. Yamazaki: 超函数・ＦＢＩ変換・無限階擬微分作用素, 共立出版, 2004.

[AKT1] T. Aoki, T. Kawai and T. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory, Special Functions, Springer-Verlag, 1991, pp.1–29.

[AKT2] ———: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Advanced Studies in Pure Mathematics, **54**, Math. Soc. Japan, 2009, pp.19–94.

[AY] T. Aoki and J. Yoshida: Microlocal reduction of ordinary differential operators with a large parameter, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **29** (1993), 959–975.

[CNP] B. Candelpergher, J.-C. Nosmas and F. Pham: Premiere pas en calcul étranger, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **43** (1993), 201–224.

[KKKoT1] S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, Kyoto J. Math, **50** (2010), 101–164.

[KKKoT2] ———: On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point — Alien calculus of WKB solutions through microlocal analysis, preprint (RIMS-1686), 2009.

[KKT] S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei: Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with merging triplet of two simple poles and a turning point — its relevance to the Mathieu equation and the Legendre equation, in preparation.

[KKo] S. Kamimoto and T. Koike: On the Borel summability of WKB theoretic transformation series, in preparation.

[KT] T. Kawai, and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008.

[Ko1] T. Koike: On a regular singular point in the exact WKB analysis, Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto Univ. Press, 2000, pp.39–54.

[Ko2] ———: On the exact WKB analysis of second order linear ordinary differential equations with simple poles, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 297–319.

[Ko3] ———: On "new" turning points associated with regular singular points in the exact WKB analysis, RIMS Kôkyûroku, **1159**, RIMS, 2000, pp.100–110.

[KoT] T. Koike and Y. Takei: On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter — Some progress around Sato's conjecture in exact WKB analysis, preprint (RIMS-1692), 2010.

[SKK] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Microfunctions and Pseudodifferential Equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations (H.Komatsu, ed.), Proceeding, Katata 1971, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, pp.265–529.

[Sa] D. Sauzin: Resurgent functions and splitting problems, RIMS Kôkyûroku, **1493**, RIMS, 2006, pp.48–117.

[V] A. Voros: The return of the quartic oscillator — The complex WKB method, Ann. Inst. Henri Poincaré, **39** (1983), 211–338.